

Colle du 14/10 - Sujet 1
Complexes et calcul algébrique

Question de cours.

1. Énoncer les formules d'Euler.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan complexe $M(z)$ tel que l'affixe z vérifie $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, développer $\sin(2a)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0; \pi[$. Calculer $P_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 2. On considère

$$f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.
2. Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Pour tout $z \in P$, donner une expression simple de $|f(z)|$. En déduire $f(P)$.

Colle du 14/10 - Sujet 2
Complexes et calcul algébrique

Question de cours.

1. Définir le coefficient binomial.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression de $z = (1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{0 \leq i < j \leq n} 3^i$.

Colle du 14/10 - Sujet 3
Complexes et calcul algébrique

Question de cours.

1. Énoncer la formule donnant le carré du module d'une somme.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^j$.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \bar{z}$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right) \cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}$